

## Gleichungen lösen

Beim Lösen von Gleichungen geht es darum, alle Lösungen einer Gleichung zu finden. Das sind die Zahlen, für die die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, wenn man sie in die Gleichung einsetzt.

### Beispiele – Lösungen von Gleichungen

a) Gleichung:  $2 \cdot x + 7 = 4$

Lösung:  $x = -1,5$

Grund: Setzt man in der Gleichung für  $x$  die Zahl  $-1,5$  ein, stimmt die Gleichung.  $[2 \cdot (-1,5) + 7 = 4]$ . Daher ist  $x = -1,5$  die Lösung der Gleichung.

b) Gleichung:  $x + 9 = 2x + 1$

Lösung:  $x = 8$  (richtig? Probiere es aus!)

c) Gleichung:  $x^2 = 4$

Lösungen:  $x_1 = 2$  und  $x_2 = -2$

Im Beispiel c) sieht man, dass manche Gleichungen auch mehrere Lösungen besitzen können.

Für viele Gleichungen gibt es Lösungsverfahren, mit denen man die Lösungen der Gleichung erhält. Dazu muss man die Gleichung umformen. Wir betrachten dazu verschiedene Arten von Gleichungen.

### Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind Gleichungen, die nur eine Variable in der ersten Potenz enthalten (etwa ein  $x$ ). Man erhält die Lösung einer solchen Gleichung, indem man sie nach  $x$  umstellt.

### Lineare Gleichungen - Lösungsverfahren

$$2 \cdot x + 7 = 4 \quad | -7$$

$$2x = -3 \quad | :2$$

$$x = -1,5 \quad \leftarrow \text{(Lösung der Gleichung, siehe 1a)}$$

### Übung 1: Löse folgende lineare Gleichungen

a)  $3x - 1 = 8$

b)  $6x - 1 = 5$

c)  $-x + 4 = 9$

d)  $-2x + 3 = 4x + 1$

e)  $-3 + t = 2t - 8$

f)  $9t = -1$

g)  $2 \cdot (u + 2) = 6$

h)  $-(x + 3) = x + 4$

i)  $2x - 3 = (3 - 2x) \cdot 3 + 1$

### Einfache quadratische Gleichungen

Einfache quadratische Gleichungen enthalten ein  $x^2$ , aber keine weitere Variable. Solche Gleichungen haben in der Regel zwei Lösungen, da eine negative Zahl quadriert positiv ist (siehe Beispiel 1c).

Man löst die Gleichungen, indem man sie nach  $x^2$  umstellt und dann die Wurzel zieht (dadurch fällt das Quadrat weg). Um beide Lösungen zu erhalten, zieht man die  $\pm$  Wurzel.

### Einfache quadratische Gleichungen – Lösungsverfahren

$$4x^2 + 3 = 103 \quad | -3$$

$$4x^2 = 100 \quad | :4$$

$$x^2 = 25 \quad | \pm\sqrt{\quad}$$

$$x_1 = 5 \text{ und } x_2 = -5$$

Beachte:

$$\sqrt{25} = 5, \text{ da } 5^2 = 25$$

### Übung 2: Löse die einfachen quadratischen Gleichungen

a)  $x^2 - 1 = 8$

b)  $6x^2 - 1 = 5$

c)  $-x^2 + 4 = 9$

d)  $-2x^2 + 3 = 4x^2 + 1$

e)  $2 + x^2 = -x^2 - 6$

f)  $9x^2 = 1$

g)  $x \cdot x = 9$

h)  $-(2x^2 + 3) = 0$

i)  $x^2 = 0$

Manche einfachen quadratischen Gleichungen haben keine Lösung, zum Beispiel die Gleichung

$$x^2 = -1.$$

Da eine Zahl quadriert niemals negativ ist, gibt es für diese Gleichung keine Lösung, denn egal, was man für  $x$  einsetzt: Die Gleichung bleibt falsch.

### Allgemeine quadratische Gleichungen

Gleichungen, die ein  $x^2$  und ein  $x$  enthalten, lassen sich mit der pq-Formel lösen:

Hat eine Gleichung die Form  $x^2 + px + q = 0$  besitzt sie die Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} .$$

**Allgemeine quadratische Gleichungen – Lösungsverfahren**

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \quad | p = -4, q = -5$$

$$x_1 = -\frac{-4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-5)} = 2 + \sqrt{9} = 5$$

$$x_2 = -\frac{-4}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-5)} = 2 - \sqrt{9} = -1$$

Hat eine allgemeine Gleichung nicht die geforderte Form  $x^2 + px + q = 0$ , muss man sie zunächst umstellen, bis sie diese Form besitzt:

$$3x^2 - 6x + 2 = -1 \quad | +1$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad | p = -2, q = 1$$

$$x_1 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 1} = 1 + \sqrt{0} = 1$$

$$x_2 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 1} = 1 - \sqrt{0} = 1$$

**Übung 3 – Allgemeine quadratische Gleichungen**

a)  $x^2 + 2x - 3 = 0$

b)  $x^2 + 3x + 1,25 = 0$

c)  $x^2 - x - 1 = 0$

d)  $2x^2 - 4x + 8 = 0$

e)  $-3x^2 - 6x + 3 = 0$

f)  $x^2 - 4x = 1$

**Produktgleichungen**

...

**Ausklammern**

...

**Substitution**

...

**Bruchgleichungen**

...

**Wurzelgleichungen**

...